

## 5.1

**a)**  $f(x) = 7x^2 - 4x + 8$

$$f'(x) = 7 \cdot 2x^{2-1} - 4 \cdot 1 + 0 = 14x - 4$$

**b)**  $f'(-3) = 14 \cdot (-3) - 4 = -42 - 4 = -46$

### Vastaus

**a)**  $f'(x) = 14x - 4$

**b)**  $f'(-3) = -46$

## 5.2

**a)**  $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^{2-1} + 4 \cdot 1 + 0 = 6x + 4$$

**b)**  $g(x) = 6x + 7$

$$g'(x) = 6 \cdot 1 + 0 = 6$$

**c)**  $h(x) = 8$

$$h'(x) = 0$$

### Vastaus

**a)**  $f'(x) = 6x + 4$

**b)**  $g'(x) = 6$

**c)**  $h'(x) = 0$

## 5.3

$$\begin{aligned}f(x) &= (1-x)(x+5) \\&= 1 \cdot x + 1 \cdot 5 - x \cdot x - x \cdot 5 \\&= -x^2 - 4x + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2x^{2-1} - 4 \cdot 1 + 0 \\&= -2x - 4\end{aligned}$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\-2x - 4 &= 0 && | + 4 \\-2x &= 4 && | : (-2) \\x &= -2\end{aligned}$$

**Vastaus**

$$x = -2$$

## 5.4

a)

$$f(x) = x^2 + 4x - 9$$

$$f'(x) = 2x + 4 \cdot 1 - 0 = 2x + 4$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x + 4 = 0 \quad | -4$$

$$2x = -4 \quad | :2$$

$$x = -2$$

b)

$$g(t) = -5t^2 + 6t + 19$$

$$g'(t) = -5 \cdot 2t + 6 \cdot 1 + 0 = -10t + 6$$

$$g'(t) = 0$$

$$-10t + 6 = 0 \quad | -6$$

$$-10t = -6 \quad | :(-10)$$

$$t = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$$

**c)**

$$\begin{aligned}h(x) &= 2(x+3)(x-4) \\&= (2x+6)(x-4) \\&= 2x^2 - 8x + 6x - 24 \\&= 2x^2 - 2x + 24\end{aligned}$$

$$h'(x) = 2 \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 0 = 4x - 2$$

$$h'(x) = 0$$

$$4x - 2 = 0 \quad | + 2$$

$$4x = 2 \quad | : 4$$

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

### **Vastaus**

**a)**  $f'(x) = 2x + 4, \quad x = -2$

**b)**  $g'(t) = -10t + 6, \quad t = \frac{3}{5}$

**c)**  $h'(x) = 4x - 2, \quad x = \frac{1}{2}$

## 5.5

Tangentti on suora, joka kulkee pisteen  $(-1, f(-1))$  kautta ja jonka kulmakerroin on  $k = f'(-1)$ .

$$f(x) = -3x^2 + 2x + 7$$

$$f'(x) = -3 \cdot 2x + 2 \cdot 1 + 0 = -6x + 2$$

$$f(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 7 = -3 - 2 + 7 = 2$$

$$f'(-1) = -6 \cdot (-1) + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \Big| \quad y_0 = f(-1) = 2, \quad k = f'(-1) = 8, \quad x_0 = -1$$

$$y - 2 = 8(x - (-1))$$

$$y - 2 = 8(x + 1)$$

$$y - 2 = 8x + 8$$

$$y = 8x + 10$$

### Vastaus

$$y = 8x + 10$$

## 5.6

a)  $f(x) = 8x^2 - 16x - 17$   
 $f'(x) = 16x - 16$

Oikea vastaus on 4.

b)  $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{3}$   
 $f'(x) = \frac{2x + 5}{3}$

Oikea vastaus on 2.

c)  $f(x) = 8(x + 1)(x - 3)$   
 $f'(x) = 16x - 16$

Oikea vastaus on 4.

d)  $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{5}x - 4$   
 $f'(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} = \frac{2x + 5}{3}$

Oikea vastaus on 2.

e)  $f(x) = (4x + 4)(2x - 6) + 99$   
 $f'(x) = 16x - 16$

Oikea vastaus on 4.

**Vastaus**

a) 4   b) 2   c) 4   d) 2   e) 4

## 5.7

**a)**  $f(x) = 5x^2 - 6x + 4$

$$f'(x) = 10x - 6$$

$$f(10) = 5 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 + 4 = 444$$

$$f'(4) = 10 \cdot 4 - 6 = 34$$

**b)**  $f(x) = 3(x + 7)(x - 2)$

$$f'(x) = 6x + 15$$

$$f(10) = 3(10 + 7)(10 - 2) = 408$$

$$f'(4) = 6 \cdot 4 + 15 = 39$$

### Vastaus

**a)**  $f(10) = 444$

$$f'(4) = 34$$

**b)**  $f(10) = 408$

$$f'(4) = 39$$



## 5.8

- a) Tangentti on suora, joka kulkee pisteen  $(-2, f(-2))$  kautta ja jonka kulmakerroin on  $k = f'(-2)$ .

$$f(x) = x^2 - 5$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f(-2) = (-2)^2 - 5 = -1$$

$$f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$$

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \left| \begin{array}{l} y_0 = f(-2) = -1, \\ k = f'(-2) = -4, \\ x_0 = -2 \end{array} \right.$$

$$y - (-1) = -4(x - (-2))$$

$$y + 1 = -4(x + 2)$$

$$y + 1 = -4x - 8$$

$$y = -4x - 9$$

- b) Tangentti on suora, joka kulkee pisteen  $(-2, g(-2))$  kautta ja jonka kulmakerroin on  $k = g'(-2)$ .

$$g(x) = -3(x+1)(x-2)$$

$$g'(x) = -6x + 3$$

$$g(-2) = -3(-2+1)(-2-2) = -12$$

$$g'(-2) = -6 \cdot (-2) + 3 = 15$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$\left| \begin{array}{l} y_0 = g(-2) = -12, \\ k = g'(-2) = 15, \\ x_0 = -2 \end{array} \right.$$

$$y - (-12) = 15(x - (-2))$$

$$y + 12 = 15(x + 2)$$

$$y + 12 = 15x + 30$$

$$y = 15x + 18$$

### **Vastaus**

**a)**  $y = -4x - 9$

**b)**  $y = 15x + 18$

## 5.9

a)  $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

$$f'(x) = -2x - 3$$

Funktion  $f$  kuvaaja leikkaa  $y$ -akselin kohdassa, jossa  $x = 0$ .  
Tällöin  $y = f(0) = 4$ .

Tangentin kulmakerroin on  $k = f'(0) = -2 \cdot 0 - 3 = -3$ .

Määritetään tangentin yhtälö.

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \left| \begin{array}{l} y_0 = f(0) = 4, \\ k = f'(0) = -3, \\ x_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$y - 4 = -3(x - 0)$$

$$y - 4 = -3x$$

$$y = -3x + 4$$

- b) Tangentti leikkaa  $x$ -akselin kohdassa, jossa  $y = 0$ .  
Ratkaistaan tätä vastaava  $x$ -koordinaatti.

$$y = 0$$

$$-3x + 4 = 0 \quad | -4$$

$$-3x = -4 \quad | :(-3)$$

$$x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

Tangentti leikkaa  $x$ -akselin pisteessä  $(\frac{4}{3}, 0)$ .

### Vastaus

a)  $y = -3x + 4$

**b)**  $(\frac{4}{3}, 0)$

## 5.10

Säiliön hetkellinen tyhjenemisnopeus on funktion  $V$  derivaatta tarkastelukohdassa.

$$V(t) = 9t^2 - 150t + 800$$

$$V'(t) = 18t - 150$$

- a)** Klo 20 on kulunut 1 tunti säiliön täyttyttämisestä, eli  $t = 1$ .

Lasketaan säiliön vesimäärän muutosnopeus hetkellä  $t = 1$ .

$$V'(1) = 18 \cdot 1 - 150 = -132 \approx -130 \text{ (m}^3/\text{h)}$$

Säiliön tyhjenemisnopeus on  $130 \text{ m}^3/\text{h}$ .

- b)** Klo 23 on kulunut 4 tunti säiliön täyttyttämisestä, eli  $t = 4$ .

Lasketaan säiliön vesimäärän muutosnopeus hetkellä  $t = 4$ .

$$V'(4) = 18 \cdot 4 - 150 = -78 \text{ (m}^3/\text{h)}$$

Säiliön tyhjenemisnopeus on  $78 \text{ m}^3/\text{h}$ .

### Vastaus

- a)**  $130 \text{ m}^3/\text{h}$

- b)**  $78 \text{ m}^3/\text{h}$

## 5.11

**a)**  $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 5x + 13$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot 2x^{2-1} - 5 \cdot 1 + 0 = \frac{3}{2}x - 5$$

**b)**  $f'(-8) = \frac{3}{2} \cdot (-8) - 5 = -12 - 5 = -17$

### Vastaus

**a)**  $f'(x) = \frac{3}{2}x - 5$

**b)**  $f'(-8) = -17$

## 5.12

$$\begin{aligned}f(x) &= 3(x-2)(x+4) \\&= 3(x \cdot x + x \cdot 4 - 2 \cdot x - 2 \cdot 4) \\&= 3(x^2 + 2x - 8) \\&= 3x^2 + 6x - 24\end{aligned}$$

$$f'(x) = 3 \cdot 2x + 6 \cdot 1 - 0 = 6x + 6$$

Ratkaistaan derivaattafunktion nollakohdat.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\6x + 6 &= 0 && | -6 \\6x &= -6 && | :6 \\x &= -1\end{aligned}$$

**Vastaus**

$$x = -1$$

## 5.13

Tangentti on suora, joka kulkee pisteen  $(-4, f(-4))$  kautta ja jonka kulmakerroin on  $k = f'(-4)$ .

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 9$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x + 4 \cdot 1 + 0 = \frac{1}{2}x + 4$$

$$f(-4) = \frac{1}{4} \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-4) + 9 = -3$$

$$f'(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4) + 4 = 2$$

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \left| \begin{array}{l} y_0 = f(-4) = -3, \quad k = f'(-4) = 2, \quad x_0 = -4 \end{array} \right.$$

$$y - (-3) = 2(x - (-4))$$

$$y + 3 = 2(x + 4)$$

$$y + 3 = 2x + 8$$

$$y = 2x + 5$$

### Vastaus

$$y = 2x + 5$$



## 5.14

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{4}(8x - 16)(2x + 3) \\&= \frac{1}{4}(8x \cdot 2x + 8x \cdot 3 - 16 \cdot 2x - 16 \cdot 3) \\&= \frac{1}{4}(16x^2 - 8x - 48) \\&= 4x^2 - 2x - 12 \\f'(x) &= 4 \cdot 2x - 2 \cdot 1 - 0 = 8x - 2\end{aligned}$$

**a)**  $f(0) = 4 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 - 12 = -12$

**b)**  $f'(x) = 0$   
 $8x - 2 = 0$   
 $8x = 2$   
 $x = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

**c)**  $f'(0) = 8 \cdot 0 - 2 = -2$

### Vastaus

**a)**  $f(0) = -12$

**b)**  $x = \frac{1}{4}$

**c)**  $f'(0) = -2$

## 5.15

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + (x-1)^2 \\&= x^2 + (x-1)(x-1) \\&= x^2 + x \cdot x - x \cdot 1 - 1 \cdot x - 1 \cdot (-1) \\&= x^2 + x^2 - 2x + 1 \\&= 2x^2 - 2x + 1\end{aligned}$$

$$f'(x) = 2 \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 0 = 4x - 2$$

**a)**  $f'(x) = -1$

$$4x - 2 = -1 \quad | + 2$$

$$4x = -1 + 2$$

$$4x = 1 \quad | : 4$$

$$x = \frac{1}{4}$$

**b)** Tangentti on vaakasuora kohdassa, jossa derivaatta saa arvon 0.

$$f'(x) = 0$$

$$4x - 2 = 0 \quad | + 2$$

$$4x = 2 \quad | : 4$$

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Lasketaan kuvaajan pisteen  $y$ -koordinaatti.

$$\begin{aligned}
 y &= f\left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Kuvaajan pisteeseen  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  piirretty tangentti on vaakasuora.

**Vastaus**

**a)**  $x = \frac{1}{4}$

**b)**  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

## 5.16

Ratkaistaan kohdat, joissa funktion  $f(x) = x^2 - x - 2$  kuvaaja leikkaa  $x$ -akselin (eli ratkaistaan funktion  $f$  nollakohdat).

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = -1 \text{ tai } x = 2$$

Tangentit piirretään pisteisiin  $(-1, 0)$  ja  $(2, 0)$ .

Lasketaan tangenttien kulmakertoimet.

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

$$f'(x) = 2x - 1$$

$$k_1 = f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3$$

$$k_2 = f'(2) = 2 \cdot (2) - 1 = 3$$

Lasketaan tangenttien yhtälöt.

piste  $(-1, 0)$  :

$$k_1 = f'(-1) = -3$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$y - 0 = -3(x - (-1))$$

$$y = -3x - 3$$

piste  $(2, 0)$  :

$$k_2 = f'(2) = 3$$

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

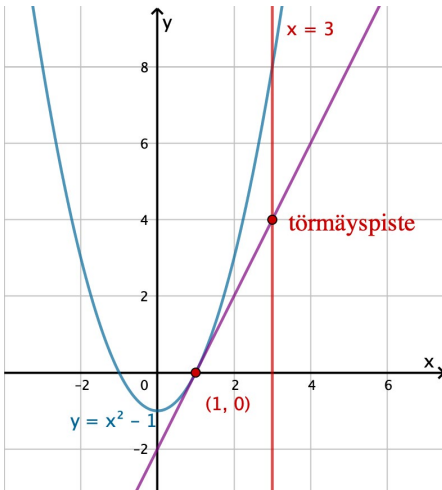
$$y - 0 = 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 6$$

**Vastaus**

$$y = -3x - 3 \text{ ja } y = 3x - 6$$

## 5.17



Määritetään paraabelin pisteeseen  $(1, 0)$  piirretyn tangentin yhtälö.

$$y = x^2 - 1$$

$$y' = 2x - 0 = 2x$$

$$k = y'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \left| \begin{array}{l} y_0 = 0, \\ k = y'(1) = 2, \\ x_0 = 1 \end{array} \right.$$

$$y - 0 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 2$$

Ratkaistaan tangentin  $y = 2x - 2$  ja rengasvallia kuvaavan suoran  $x = 3$  leikkauspiste.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 2x - 2 \\ x = 3 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} \text{Sijoitetaan ylempään yhtälöön.} \end{array} \right.$$

$$y = 2 \cdot 3 - 2 = 4$$

Auto törmää rengasvalliin pisteessä  $(3, 4)$ .

**Vastaus**

$(3, 4)$

## 5.18

a)  $D(5x^2 - 6x + 12) = 5 \cdot 2x - 6 \cdot 1 + 0 = 10x - 6$

b)  $\frac{d}{dx}(\frac{3}{8}x^2 - 9x) = \frac{3}{8} \cdot 2x - 9 \cdot 1 = \frac{3}{4}x - 9$

c)  $\frac{d}{dx}(ax^2 + a^2x + a) = a \cdot 2x + a^2 \cdot 1 + 0 = 2ax + a^2$

d)  $\frac{d}{da}(ax^2 + a^2x + a) = x^2 \cdot 1 + x \cdot 2a + 1 = x^2 + 2ax + 1$

### Vastaus

a)  $10x - 6$

b)  $\frac{3}{4}x - 9$

c)  $2ax + a^2$

d)  $x^2 + 2ax + 1$

## 5.19

- a) Pallo heitetään hetkellä  $t = 0$  s. Pallo osuu maahan, kun  $h(t) = 0$ .

Ratkaistaan tätä hetkeä vastaava  $t$ :n arvo.

$$h(t) = 0$$

$$20t - 5t^2 = 0$$

$$t = 0 \text{ tai } t = 4 \text{ (s)}$$

Pallo osuu maahan hetkellä  $t = 4$  s, joten pallo on ilmassa 4 s.

- b) Pallon nopeus on korkeuden  $h$  hetkellinen muutosnopeus eli derivaatta.

$$h(t) = 20t - 5t^2$$

$$h'(t) = 20 - 10t$$

$$t = 1 \text{ s} : h'(1) = 20 - 10 \cdot 1 = 10 \text{ (m/s)} \quad \text{nopeus ylöspäin}$$

$$t = 2 \text{ s} : h'(2) = 20 - 10 \cdot 2 = 0 \text{ (m/s)} \quad \text{pysähtyy eli on mahd korkealla}$$

$$t = 3 \text{ s} : h'(3) = 20 - 10 \cdot 3 = -10 \text{ (m/s)} \quad \text{nopeus alaspäin}$$

1 s kuluttua 10 m/s ylöspäin,

2 s kuluttua 0 m/s,

3 s kuluttua 10 m/s alaspäin

- c) Pallo kohtaa maanpinnan hetkellä  $t = 4$  s. Nopeus on tällöin

$$t = 4 \text{ s} : h'(4) = 20 - 10 \cdot 4 = -20 \text{ (m/s)}$$

Pallo osuu maahan nopeudella 20 m/s.

### Vastaus

- a) 4 s



- b)** 1 s kuluttua 10 m/s ylöspäin,  
2 s kuluttua 0 m/s,  
3 s kuluttua 10 m/s alaspäin
- c)** 20 m/s

## 5.20

$$f(x) = 2x^2 - x + 5$$

$$f'(x) = 4x - 1$$

Funktio vähenee nopeimmin välillä  $-1 \leq x \leq 3$ , kun derivaattafunktion arvo tällä välillä on mahdollisimman pieni negatiivinen luku.

Derivaattafunktion  $f'$  kuvaaja on nouseva suora, joten derivaattafunktio saa mahdollisimman pienen arvon tarkasteluvälin vasemmassa päätepisteessä  $x = -1$ .

Tarkistetaan vielä, että kohdassa  $x = -1$  funktio on todella vähenevä:

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1) - 1 = -5 < 0.$$

Funktio vähenee nopeimmin välillä  $-1 \leq x \leq 3$ , kun  $x = -1$ .

### Vastaus

kohdassa  $x = -1$

## 5.21

a)  $f(x) = ax^2 - 5x + a$   
 $f'(x) = 2ax - 5$

Ratkaistaan se  $a$ :n arvo, jolla funktion  $f$  derivaatta kohdassa  $-1$  on  $3$ .

$$\begin{aligned}f'(-1) &= 3 \\2a \cdot (-1) - 5 &= 3 \\-2a - 5 &= 3 \\a &= -4\end{aligned}$$

b) Ratkaistaan se  $a$ :n arvo, jolla funktion  $f$  derivaattafunktion nollakohta on  $x = 4$ .

$$\begin{aligned}f'(4) &= 0 \\2a \cdot 4 - 5 &= 0 \\8a - 5 &= 0 \\a &= \frac{5}{8}\end{aligned}$$

### Vastaus

a)  $a = -4$

b)  $a = \frac{5}{8}$